ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2007. május 8.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. (Ha a vizsgázó nem jelölte ki az értékelendő változatot, a javító tanár a legutolsó megoldási próbálkozást értékelje!)
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II./B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
$a-2$	2 pont	*Ha csak az egyik tényezővel egyszerűsít, 1 pontot kaphat.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
A feltételből $32q^4 = 2$, ahonnan	1 pont	
$q_1 = \frac{1}{2} \quad \left(= \sqrt[4]{0{,}0625}\right)$,	1 pont	
$q_2 = -\frac{1}{2}$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3.		
1. állítás: Igaz.	1 pont	
2. állítás: Hamis.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

4.		
Ha Bea most x éves, akkor $2{,}5x = 45$,	2 pont	
ahonnan $x = 18$.	1 pont	*Hibásan felírt egyenlet megoldása nem ér pontot.*
Összesen:	**3 pont**	

5.		
Maximuma van,	1 pont	
szélsőérték helye: 1;	1 pont	*Ha hibás vagy pontatlan válaszokban (pl. P(1;4)) jó gondolatok megjelennek, 1 pont adható.*
szélsőérték értéke: 4.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6.		
Bármelyik jól megadott intervallum. Pl.: $a \le x \le b$ vagy $[a\,;b]$ alakban.	2 pont	*Ha helyes végpontú, de nem zárt intervallumot ad meg a vizsgázó, akkor 1 pontot kap.*
Összesen:	**2 pont**	

7.		
Minden valós szám, kivéve 2 és –2.	2 pont	*$x \neq \pm 2$ válasz is elfogad–ható.*
Összesen:	**2 pont**	
Hibás jelölésű, de mindkét helyes választ tükröző megoldásra 1 pont adható.		

8.		
$\frac{x}{4{,}8} = \frac{\sin 56°}{\sin 41°}$.	1 pont	
$x \approx 6{,}1$ cm.	2 pont	*Hibás kerekítés esetén 1 pont adható.*
Összesen:	**3 pont**	

9.		
$x = -16$.	2 pont	*A pontszám nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

10.		
Módusz: 4.	1 pont	
Medián: 3.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.		
$x = \frac{1}{4} (= 0{,}25)$.	2 pont	
Számegyenesen ábrázolás.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

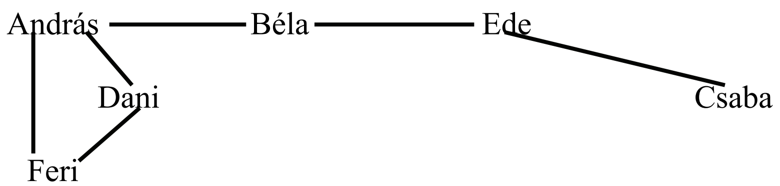
12.		
Összesen 16 db hattal osztható szám van a megadott tartományban, közülük 4 db osztható 8-cal.	2 pont	
A valószínűség: $\frac{4}{16}$ (= 25 %).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II/A

13. a)		
$7+x<-2\cdot(x-2)\Leftrightarrow 3x<-3$,	1 pont	
ahonnan $x<-1$. ($A=\left]-\infty;-1\right[$).	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

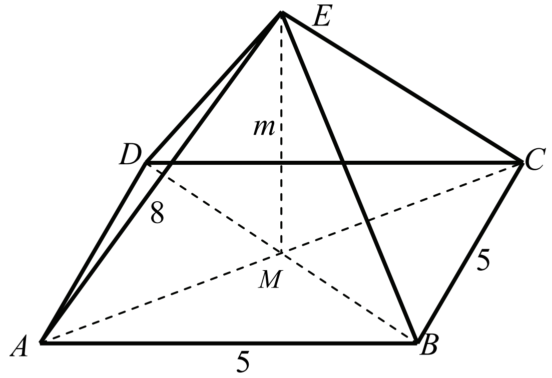
13. b)		
Az $x^2+x-6=0$ egyenlet gyökei: –3; 2.	2 pont	
Mivel a főegyüttható pozitív,	1 pont	*A grafikon vázlata is jó indoklás.*
ezért $-3\le x\le 2$. ($B=[-3;2]$).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

13. c)		
$A\cup B=\left]-\infty;2\right]$.	2 pont	*Ha csak az intervallumok nyíltságát vagy zártságát egy halmaz esetén hibázza el, akkor 1 pontot, ha több halmaznál, akkor 2 pontot veszítsen.*
$A\cap B=\left[-3;-1\right[$.	2 pont	
$B\setminus A=[-1;2]$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	
A kérdezett halmazok bármilyen követhető formában való helyes megadása (számegyenesen, szöveggel stb.) esetén járnak a megfelelő pontok.		

14. a)		
		
A gráf helyes felrajzolása.	4 pont	*Egy hiba esetén 2 pontot kap, több hiba esetén nem jár pont.*
Összesen:	**4 pont**	

14. b)		
Ha mindenki mindenkivel egyszer játszik, akkor a mérkőzések száma $\binom{6}{2}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$.	2 pont	
6 mérkőzést már lejátszottak, ezért 9 mérkőzés van még hátra.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha hibás adatokkal, de elvileg helyesen számol.*
Összesen:	**3 pont**	*Rajzról leolvasott helyes értékekért is jár a 3 pont.*

14. c)		
Ha Dani az első helyen végez, akkor a többiek $5! = 120$-féleképpen „követhetik”.	2 pont	
Ugyanennyi lehetőség van akkor is, ha Dani második.	2 pont	
Így a kérdéses lehetőségek száma: 240.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

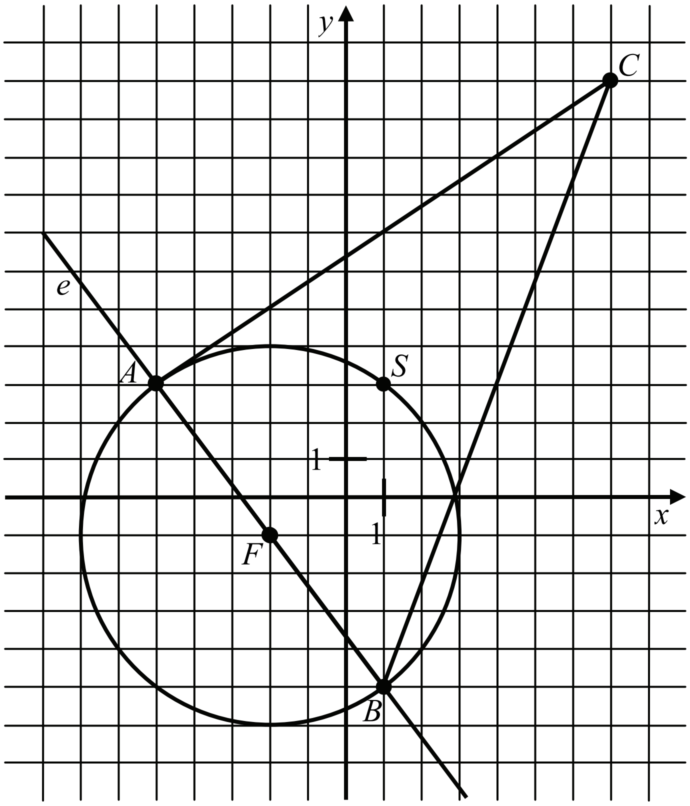
15. a)		
	1 pont	
A test magassága m. A négyzet átlójának fele: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (cm).	1 pont	
$m=\sqrt{64-12{,}5}(\approx 7{,}2\text{ cm})$.	1 pont	
A gúla alakú gyertya térfogata: $V=\frac{T_a\cdot m}{3}\approx\frac{5^2\cdot 7{,}2}{3}\approx 60\,\text{cm}^3$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
Követhető jó megoldás ábra nélkül is teljes értékű.		

15. b)		
Az x térfogatú viasznak a 94%-a adja a 130 db gyertya térfogatát: $0{,}94\cdot x=130\cdot V$.	2 pont	*1,06·130V elvi hibás, nem adható meg a 2 pont.*
$x=\frac{130}{0{,}94}\cdot 60\approx 8298\,(\text{cm}^3)$.	1 pont	
8,3 liter viaszra van szükség.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. c)		
Az oldallap magassága (Pitagorasz tételéből): $m_o=\sqrt{8^2-2{,}5^2}$ ($\approx$ 7,60 cm).	1 pont	
A palást területe: $P=4\cdot\frac{5\cdot m_o}{2}=10m_o$ ($\approx$ 76 cm^2).	1 pont	
A gúla felszíne: $A=5^2+P\approx 101$ (cm^2).	1 pont	
A teljes felhasznált papírmennyiség: $1{,}36\cdot 40\cdot A=$ $1{,}36\cdot 40\cdot 101\approx 5494$ (cm^2).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II/B

16. a)



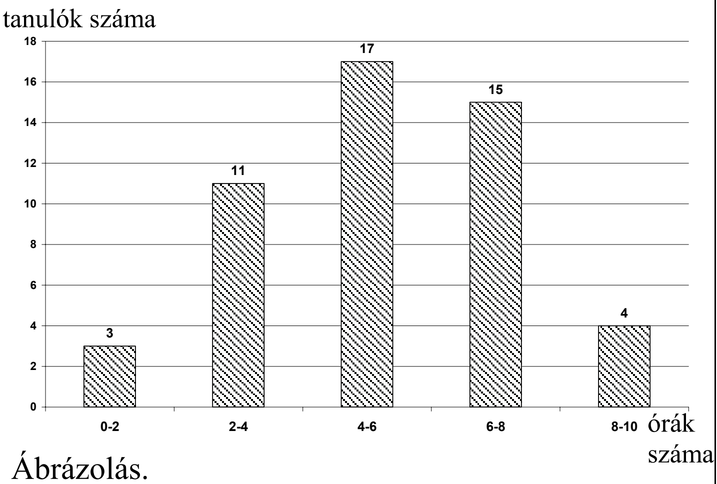
Mivel 4·100 + 3·(–136) ≠ −11, ezért a *P* pont nincs az egyenesen.	1 pont	
Az *e* egyenes ábrázolása.	1 pont	
A *Q* pontra: 4*x* + 3·107 = −11,	1 pont	
ahonnan a *Q* pont abszcisszája: *x* = –83.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. b)

Az *AB* szakasz felezőpontja *F*. $F(-2;-1)$.	2 pont	
A kör sugara: $r=\left\|\overrightarrow{AF}\right\|=\sqrt{(-2+5)^2+(-1-3)^2}=5$.	2 pont	
A kör egyenlete: $(x+2)^2+(y+1)^2=25$.	2 pont	
Mivel $(1+2)^2+(3+1)^2=25$, ezért az *S* pont rajta van a körön.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

16. c) **első megoldás**		
A C pont koordinátái: $(x_c; y_c)$. S koordinátáira felírható: $1=\frac{-5+1+x_c}{3}$; $3=\frac{3+(-5)+y_c}{3}$.	3 pont	*A képlet használatának felismerése 1 pont, egyik és másik koordinátára való alkalmazás 1-1 pont.*
Ahonnan $x_c = 7$,	1 pont	
$y_c = 11$,	1 pont	
tehát $C(7; 11)$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

16. c) **második megoldás**		
A háromszög súlypontja a súlyvonalon az oldalhoz közelebbi harmadolópont.	1 pont	
$\overrightarrow{FS} = \underline{\mathbf{s}} - \underline{\mathbf{f}} = (1; 3) - (-2; -1) = (3; 4)$.	1 pont	
$\overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{FS} = 2\cdot(3; 4) = (6; 8)$,	1 pont	
amelyet $\underline{\mathbf{s}}$ vektorhoz hozzáadva megkapjuk a C pont koordinátáit:	1 pont	
$\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{s}} + \overrightarrow{SC} = (1; 3) + (6; 8) = (7; 11)$, tehát $C(7; 11)$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. a)		
A tengelyre kerülő adatok elnevezése.	1 pont	
 Ábrázolás.	2 pont	*Minden elvileg helyes ábrázolás (pl.: a tengelyek felcserélése, összeérő oszlopok) is elfogadható.* *Az oszlopokon az értékek feltüntetése elhagyható.*
Összesen:	**3 pont**	

17. b)		
A középértékekkel számított átlag: $\frac{3\cdot1+11\cdot3+17\cdot5+15\cdot7+4\cdot9}{50}=\frac{262}{50}=$	2 pont	
$=5{,}24$. A tanulók tehát átlagosan 5,24 órát ($\approx$ 5 óra 14 perc) töltenek a biológia házi feladatok megoldásával hetente.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

17. c)		
50 tanuló közül $\binom{50}{2}=\frac{50\cdot49}{2}=1225$-féleképpen lehet két tanulót kiválasztani.	2 pont	
A két évfolyamból 30, illetve 20-féleképpen lehet egy-egy tanulót kiválasztani, így a kedvező esetek száma: $30\cdot20=600$.	2 pont	
A kérdéses valószínűség: $p=\frac{600}{1225}=\frac{24}{49}(\approx0{,}49)$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. d)		
Hetente legalább 4 órát 36 tanuló tölt a biológia házi feladatok megoldásával.	1 pont	
Közülük két tanulót $\binom{36}{2}=\frac{36\cdot35}{2}=630$-féleképpen lehet kiválasztani.	2 pont	
Így a keresett valószínűség: $p=\frac{630}{1225}=\frac{18}{35}(\approx0{,}51)$.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. a)		
A háromjegyű szám számjegyei: $a - d;\ a;\ a + d$, ahol a a számtani sorozat középső tagja, d a differencia.	1 pont	
Felírható: $100(a-d)+10a+a+d=53{,}5\cdot 3a$, (1)	2 pont	
és $\left[100(a-d)+10a+a+d\right]-$ $-[100(a+d)+10a+a-d]=594$. (2)	2 pont	
A (2) egyenletből: $-198d = 594$,	1 pont	
ahonnan $d = -3$.	1 pont	
Az (1) egyenletből: $111a - 99d = 3\cdot 53{,}5a$,	1 pont	
ahonnan $a = -2d$.	1 pont	
$a = -2\cdot(-3) = 6$ a középső számjegy, a háromjegyű szám: 963.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	*Az ellenőrzést külön nem értékeljük.*

18. a) (más jelöléssel)		
A háromjegyű szám számjegyei a felírás sorrendjében: $a;\ a + d;\ a + 2d$, ahol a a számtani sorozat első tagja, d a differencia.	1 pont	
$100a+10(a+d)+a+2d=53{,}5\cdot 3\cdot(a+d)$, (1)	2 pont	
$\left[100a+10(a+d)+a+2d\right]-$ $-[100(a+2d)+10(a+d)+a]=594$ (2)	2 pont	
A (2) egyenletből: $-198d = 594$,	1 pont	
ahonnan $d = -3$.	1 pont	
Az (1) egyenletből: $111a + 12d = 3\cdot 53{,}5(a + d)$,	1 pont	
ahonnan $a = -3d$.	1 pont	
$a = -3\cdot(-3) = 9$ az első számjegy. A háromjegyű szám: 963.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	*Az ellenőrzést külön nem értékeljük.*
Ha a vizsgázó felsorolja az összes számításba jövő háromjegyű számot (5 pont), kiválasztja a helyes számot (2 pont), megmutatja, hogy más nem lehet (3 pont), teljes pontszám jár.		

18 b)		
A megfelelő számok: 234; 345; 456; 567; 678; 789; 246; 357; 468; 579; 258; 369.	4 pont	*Minden 3 db helyesen megadott szám 1 pontot ér.* *Ha a felsorolásban nem megfelelő szám is meg–jelenik, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.*
Összesen:	**4 pont**	

18. c)		
Közülük 9-cel osztható: 234; 369; 468; 567.	1 pont	
A jó esetek száma 4; az összes eset 12.	1 pont	
A keresett valószínűség: $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	